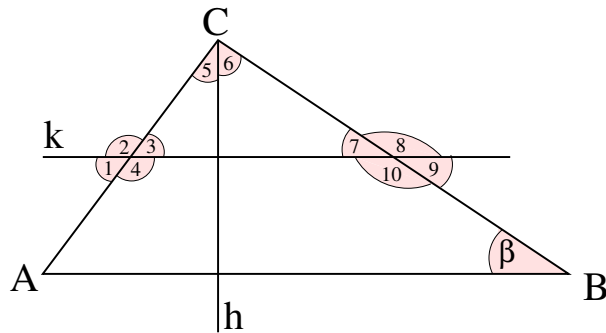


Mathematischer Selbsttest - Fakultät Physik

Lösungen

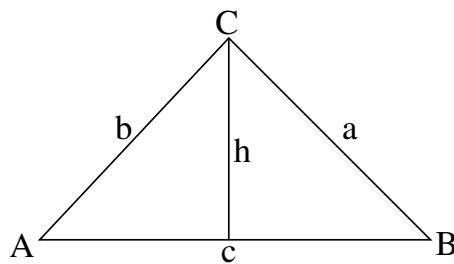
Elementare Geometrie und Trigonometrie

1. In der Skizze ist die Gerade k parallel zur Seite AB des Dreiecks ABC , und die Gerade h ist senkrecht zur Seite AB (d.h. sie schließt mit der Seite AB rechte Winkel ein) und geht durch den Punkt C . Welche der nummerierten Winkel sind mit Sicherheit genauso groß wie der Winkel β ?



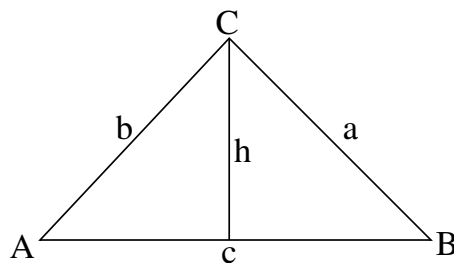
- a) 1, 3, 5, 7, 9
b) 1, 3, 7, 9
c) 7, 9

2. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $c = 6$ cm und $a = b = 5$ cm. Was ist die Länge der Winkelhalbierenden h ?



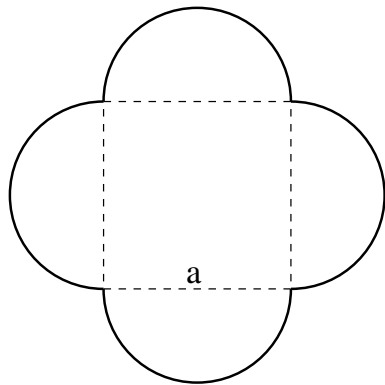
- a) 4 cm
b) 3 cm
c) 2 cm

3. Gegeben sei noch einmal das gleichschenklige Dreieck ABC mit $c = 6$ cm und $a = b = 5$ cm. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ?



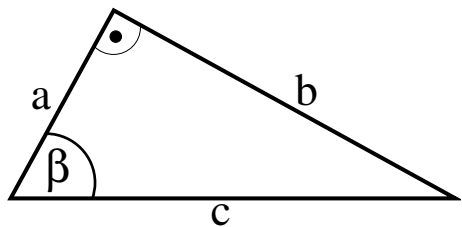
- a) 10 cm^2
b) 12 cm^2
c) 16 cm^2

4. Auf den Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge a sind Halbkreise aufgesetzt. Wie groß sind der Umfang U und der Flächeninhalt F der gesamten Figur (durchgezogene Linie)?



- a) $U = 2\pi a$, $F = (1 + \pi)a^2$
b) $U = 2\pi a$, $F = (1 + \frac{\pi}{2})a^2$
c) $U = 4\pi a$, $F = (1 + \pi)a^2/2$

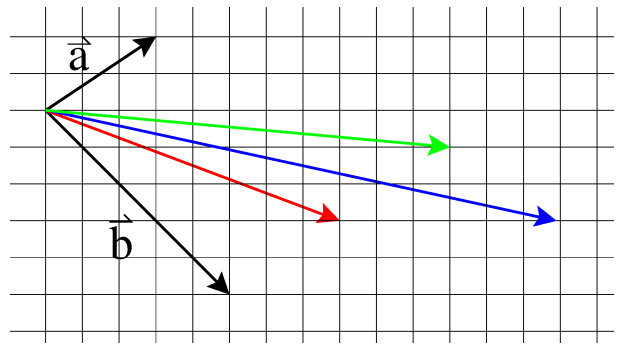
5. Gegeben sei das unten stehende rechtwinklige Dreieck. Drücken Sie $\sin \beta$, $\cos \beta$ und $\tan \beta$ durch die Seitenlängen a, b, c des Dreiecks aus.



- a) $\sin(\beta) = b/c$, $\cos(\beta) = a/c$, $\tan(\beta) = b/a$
b) $\sin(\beta) = b/c$, $\cos(\beta) = a/c$, $\tan(\beta) = a/b$
c) $\sin(\beta) = a/c$, $\cos(\beta) = b/c$, $\tan(\beta) = b/a$

Analytische Geometrie

6. Gegeben seien die zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$. Welcher Vektor ist $2\vec{a} + \vec{b}$?



- a) rot
b) grün
c) blau

7. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ der beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ | b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ | c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$

8. Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ der beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$\text{a) } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \text{b) } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \right| \quad \text{c) } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

9. Welchen Betrag hat das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$, wenn zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ senkrecht oder parallel zueinander stehen?

$$\begin{array}{ll} \text{senkrecht :} & \text{a) } |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| / \sqrt{2} \quad \left| \quad \text{b) } |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \quad \right| \quad \text{c) } |\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0 \\ \text{parallel :} & |\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0 \quad \left| \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0 \quad \right| \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{array}$$

10. Welchen Betrag hat das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$, wenn zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ senkrecht oder parallel zueinander stehen?

$$\begin{array}{ll} \text{senkrecht :} & \text{a) } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| / \sqrt{2} \quad \left| \quad \text{b) } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \quad \right| \quad \text{c) } |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \\ \text{parallel :} & |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \quad \left| \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \quad \right| \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{array}$$

11. Welche Gleichung beschreibt eine Gerade in der x - y -Ebene, die durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

geht?

$$\text{a) } y = x - 1 \quad \left| \quad \text{b) } y = x + 1 \quad \right| \quad \text{c) } y = x - 2$$

12. Welchen Abstand haben die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} ?$$

$$\text{a) } 7\sqrt{2} \quad \left| \quad \text{b) } 5\sqrt{2} \quad \right| \quad \text{c) } 3\sqrt{2}$$

13. Welche Gleichung beschreibt einen Kreis in der x - y -Ebene mit dem Radius 5 und dem Mittelpunkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$?

$$\text{a) } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 25 \quad \left| \quad \text{b) } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 25 \quad \right| \quad \text{c) } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

Gleichungen und Ungleichungen

14. Bestimmen Sie die Lösung für x und y des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & a \\ x + 3y & = & b \end{array} .$$

Was ist $x + y$?

$$\text{a) } x + y = a - b \quad \left| \quad \text{b) } x + y = 2a - b \quad \right| \quad \text{c) } x + y = a - 2b$$

15. Bestimmen Sie die beiden Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \quad .$$

Was ist $x_1 + x_2$?

$$\text{a) } x_1 + x_2 = 14 \quad | \quad \text{b) } x_1 + x_2 = 12 \quad | \quad \text{c) } x_1 + x_2 = 10$$

16. Lösen Sie die Gleichung

$$p = \frac{1}{a + p}$$

nach a auf.

$$\text{a) } a = \frac{1 - p^2}{p} \quad | \quad \text{b) } a = \frac{1 - p}{p^2} \quad | \quad \text{c) } a = \frac{1 - p^2}{p^2}$$

17. Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{a} + 1} = \frac{1}{\sqrt{a} - 1}$$

nach x auf.

$$\text{a) } x = (a - 1)^2 \quad | \quad \text{b) } x = a^2 - 1 \quad | \quad \text{c) } x = a - 1$$

18. Für welche Werte von x gilt die Ungleichung,

$$\frac{x}{1 + x} > \frac{1}{2} ?$$

$$\text{a) } x > 1 \quad | \quad \text{b) } x < -1 \quad | \quad \text{c) } x < -1 \text{ und } x > 1$$

Elementare Funktionen

19. Es seien $u, m > 0$. Welche Umformung von

$$\sqrt[m+2]{u^{5m+10}}$$

ist korrekt?

$$\text{a) } \sqrt[m+2]{u^{5m+10}} = u^5 \quad | \quad \text{b) } \sqrt[m+2]{u^{5m+10}} = \sqrt{u} \quad | \quad \text{c) } \sqrt[m+2]{u^{5m+10}} = \sqrt{u}^5$$

20. Welche Umformung von

$$(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$$

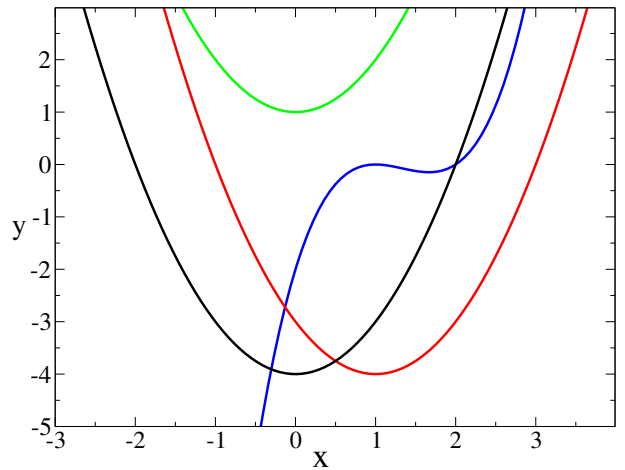
ist korrekt?

$$\text{a) } (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \sqrt{3} \quad | \quad \text{b) } (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 3 \quad | \quad \text{c) } (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 9$$

21. In der Abbildung sind in roter, schwarzer, blauer und grüner Farbe die Graphen der Polynome (ganzrationale Funktionen)

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2, & h(x) &= (x-3)(x+1), \\ j(x) &= x^2 + 1, & k(x) &= x^2 - 4 \end{aligned}$$

abgebildet. Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die zugehörige Funktionsvorschrift zu.

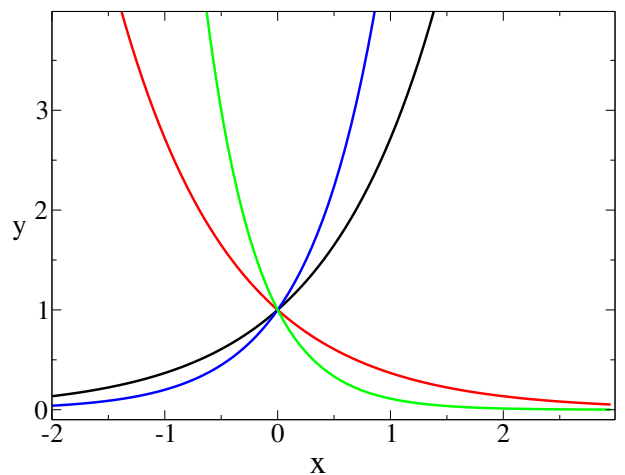


- a) g : schwarz , h : grün , j : blau , k : rot
b) g : blau , h : grün , j : rot , k : schwarz
c) g : blau , h : rot , j : grün , k : schwarz

22. In der Abbildung sind in roter, schwarzer, blauer und grüner Farbe die Graphen der Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp(x), & h(x) &= \exp(-x), \\ j(x) &= 5^x, & k(x) &= 9^{-x} \end{aligned}$$

abgebildet. Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die zugehörige Funktionsvorschrift zu.



- a) g : rot , h : schwarz , j : grün , k : blau
b) g : schwarz , h : rot , j : blau , k : grün
c) g : blau , h : grün , j : schwarz , k : rot

23. Es sei $\ln(y)$ der natürliche Logarithmus von y und e die Eulersche Zahl. Welche Umformung von

$$\ln(\sqrt{e} \cdot e^{3x})$$

ist korrekt?

- a) $\ln(\sqrt{e} \cdot e^{3x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + 3x$ b) $\ln(\sqrt{e} \cdot e^{3x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln(3x)$ c) $\ln(\sqrt{e} \cdot e^{3x}) = \frac{1}{2} + 3x$

Ableitungen

24. Was ist die erste Ableitung (Differentialquotient) y' der Funktion

$$y(x) = 2\sqrt{x} \cdot e^{2x} ,$$

in der e die Eulersche Zahl ist?

$$\text{a) } y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}(1 + 4x) \quad \Bigg| \quad \text{b) } y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x}) \quad \Bigg| \quad \text{c) } y' = \frac{1}{x}(e^{2x} + 4x)$$

25. Was ist die erste Ableitung (Differentialquotient) y' der Funktion

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} ?$$

$$\text{a) } y' = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \quad \Bigg| \quad \text{b) } y' = -\frac{2x}{(1+x^2)} \quad \Bigg| \quad \text{c) } y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$